# Correction TD17, Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce

Kylian Prigent

15 juillet 2024

Soit $a$ un réel. On définit la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{1}{1 - 2aX + X^2}.$$

On appelle $Q_n(x)$ le développement limité de la fonction rationnelle $x \mapsto F(x)$ en 0 à l'ordre $n$.

On commence par un calcul simple, celui de $Q_3$, i.e. on effectue le DL de $\dfrac{1}{1 - 2ax + x^2}$ à l'ordre 3 en 0.

$$\begin{aligned}
Q_3(x) &= 1 + (2ax - x^2) + (2ax - x^2)^2 + (2ax - x^2)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&= 1 + 2ax - x^2 + 4a^2x^2 - 4ax^3 + 8a^3x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&= 1 + 2ax + (4a^2 - 1)x^2 + 4a(2a^2 - 1)x^3 + + \underset{x\to 0}{o}(x^3)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= Q_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
&= Q_{n+1}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})
\end{aligned}$$

Le polynôme $Q_{n+1}$ est la partie principale du DL et est de degré $n + 1$. Il est de la forme :

$$Q_{n+1}(x) = \widetilde{Q_n}(x) + b_{n+1}x^{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$$

Par unicité du DL, on a alors $\widetilde{Q_n}(x) = Q_n(x) \in \mathbb{R}[X]$.

On a donc la relation :

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(x) + b_{n+1}x^{n+1}.$$

L'égalité

$$F(X) = Q_n(X) + \frac{U_{n+1}X^{n+1} - U_nX^{n+2}}{1 - 2aX + X^2}$$

est une égalité de fraction de $\mathbb{R}(x)$ avec $(U_n)_n$ une suite de réels. Par multiplication par $1 - 2aX + X^2$, on obtient :

$$1 = (1 - 2aX + X^2)Q_n(X) + U_{n+1}X^{n+1} - U_nX^{n+2}$$

Par argument de degré, on a alors; en écrivant $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_kX^k$ :

$$0 = b_n - U_n \qquad \text{coefficient de } X^{n+2} \tag{1}$$

$$0 = -2ab_n + b_{n-1} - U_{n+1} \qquad \text{coefficient de } X^{n+1} \tag{2}$$

On obtient donc la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_{n+2} = 2aU_{n+1} - U_n$$

Et l'équation (1) nous donne :

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k X^k + \underset{X \to 0}{o}(X^n).$$

Au total, la suite de réels $(U_n)_n$ est une suite de réels qui vérifient les deux équations suivantes :

$$U_{n+2} = 2aU_{n+1} - U_n \tag{3}$$

$$F(X) = Q_n(X) + \frac{U_{n+1}X^{n+1} - U_n X^{n+2}}{1 - 2aX + X^2}. \tag{4}$$

De la relation (3), on en déduit que $U_n$ est en fait une fonction polynomiale en $a$ à coefficients entiers. En effet :
Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite :

$$\begin{cases} & U_0 &= 1 \\ & U_1 &= 2a \\ \forall n \in \mathbb{N} & U_{n+2} &= 2aU_{n+1} - U_n \end{cases}$$

est obtenue par somme, différence et produit de 1, 2 et $a$. Avec "$a = X$", cela revient à définir une suite de polynômes à coefficients entiers :

$$\begin{cases} & U_0(X) &= 1 \\ & U_1(X) &= 2X \\ \forall n \in \mathbb{N} & U_{n+2}(X) &= 2XU_{n+1}(X) - U_n(X) \end{cases}$$

On note $U_n(a)$ les fonctions polynomiales.

Le monôme dominant de $U_n(a)$ est $2^n a^n$. Et $U_n(a)$ est donc polynomial de degré $n$ en $a$.

On considère la fonction $a \mapsto U_n(a)$. On cherche à connaître sa parité. On dispose des caractérisations suivantes pour un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ :

$$\begin{aligned} \text{Le polynôme } P \text{ est pair} & \text{ssi tous les coefficients impairs sont nuls} \\ & \text{ssi } P = \sum a_{2k} X^{2k} \\ & \text{ssi } P(-X) = P(X) \in \mathbb{R}[X] \\ & \text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} P(-x) = P(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Et encore :

$$\begin{aligned} \text{Le polynôme } P \text{ est impair} & \text{ssi tous les coefficients pairs sont nuls} \\ & \text{ssi } P = \sum a_{2k+1} X^{2k+1} \\ & \text{ssi } P(-X) = -P(X) \in \mathbb{R}[X] \\ & \text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} P(-x) = -P(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Étant donnée la formule de récurrence de la suite $U_n$, il est loisible de penser faire une récurrence sur les deux prédécesseurs pour montrer la relation :

$$U_n(-X) = (-1)^n U_n(X)$$

**Initialisation** L'initialisation est triviale.

**Hérédité** On suppose la relation vraie à l'ordre $n$ et à l'ordre $n+1$, i.e. on suppose

$$U_n(-X) = (-1)^n U_n(X)$$

et

$$U_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} U_{n+1}(X)$$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n+1$ et il faut simplement la montrer à l'ordre $n+2$.

$$\begin{aligned}
U_{n+2}(-X) &= 2(-X)U_{n+1}(-X) - U_n(-X) \\
&= -(-1)^{n+1}2XU_{n+1}(X) - (-1)^n U_n(X) \\
&= (-1)^{n+2}2XU_{n+1}(X) - (-1)^n U_n(X) \\
&= (-1)^{n+2}2XU_{n+1}(X) - (-1)^{n+2} U_n(X) \\
&= (-1)^{n+2}(2XU_{n+1}(X) - U_n(X)) \\
&= (-1)^{n+2}U_{n+2}(X)
\end{aligned}$$

On montre maintenant que le polynôme $U_n$ admet $n$ racines réelles séparées par les racines de $U_{n-1}$. On procède à nouveau par récurrence.

**Initialisation** On a le tableau de variation suivant :

| $X$ | $-\infty$ | | | 0 | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_0 = 1$ | + | + | + | + | + | + | + |
| $u_1 = 2x$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $u_2 = 2xu_1 - u_0 = 4x^2 - 1$ | + | + | 0 | - | 0 | + | + |
| $u_3 = 2xu_2 - u_1 = 8x^3 - 4x = 4x(2x^2 - 1)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

**Hérédité** Le résultat sur la parité des éléments de la suite nous permet de dresser le tableau de variation suivant :

| $X$ | $-\infty$ | | | | | | | 0 | | | | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_{2n-1}$ | - | - | - | - | 0 | + | $\dots$ | 0 | $\dots$ | - | 0 | + | + | + | + |
| $u_{2n}$ | - | - | - | 0 | + | 0 | $\dots$ | ? | $\dots$ | 0 | + | 0 | - | - | - |
| $u_{2n+1} = 2xu_{2n} - u_{2n-1}$ | - | - | 0 | + | 0 | - | $\dots$ | 0 | $\dots$ | + | 0 | - | 0 | + | + |
| $u_{2n+2} = 2xu_{2n+1} - u_{2n}$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | $\dots$ | ? | $\dots$ | 0 | - | 0 | + | 0 | - |

Quitte à prendre $-u_{2n}$ au lieu de $u_{2n}$, on peut supposer que l'on a le tableau ci-dessus dont les deux premières lignes proviennent de l'hypothèse de récurrence.

En effet lorsque $u_{2n}$ est nul, alors $u_{2n+1}$ est de signe opposé à $u_{2n-1}$ ; et lorsque $u_{2n+1}$ est nul, alors $u_{2n+2}$ est de signe opposé à $u_{2n}$. On utilise donc de manière crucial le fait que tout polynôme est continue, le fait que l'on connaissent le signe des polynômes entre les racines de son prédécesseur et le théorème des valeurs intermédiaires.
Donc le TVI dit que l'on intercale les racines. D'où $U_n$ a $n$ racines séparées pas les racines de $U_{n-1}$.

On suppose dorénavant que $a = \cos\theta$ où $\theta \in ]0, \pi[$. On décompose $F$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$.
On considère le polynôme $P = 1 - 2aX + X^2$. Son discriminant est

$$\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1) = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$$

Donc les racines complexes conjuguées du polynômes sont :

$$\rho_{1,2} = \cos\theta \pm \sin\theta = e^{\pm i\theta}.$$

Ainsi la décomposition en élément simple de $F$ dans $\mathbb{C}$ est de la forme :

$$F = \frac{1}{(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})} = \frac{\alpha}{(X - e^{i\theta})} + \frac{\beta}{(X - e^{-i\theta})}$$

En multipliant par $\left(X - e^{i\theta}\right)$ puis en substituant $X$ par $e^{i\theta}$, on obtient :

$$\alpha = \frac{1}{2i\sin\theta} = \frac{-i}{2\sin\theta}.$$

De même on obtient :

$$\beta = \frac{1}{-2i\sin\theta} = \frac{i}{2\sin\theta}.$$

Donc la décomposition en éléments simples de $F$ dans le corps des complexes est :

$$F = \frac{\frac{-i}{2\sin\theta}}{(X - e^{i\theta})} + \frac{\frac{i}{2\sin\theta}}{(X - e^{-i\theta})}$$

Maintenant pour exprimer $Q_n$ en fonction de $\theta$ il suffit d'effectuer le DL à l'ordre $n$ de $\dfrac{1}{X - e^{-i\theta}}$ et celui de de $\dfrac{1}{X - e^{i\theta}}$ au voisinage de 0.

$$\frac{1}{h - e^{-i\theta}} = \frac{1}{e^{-i\theta}\left(he^{i\theta} - 1\right)} = \frac{-e^{i\theta}}{1 - he^{i\theta}} = -e^{i\theta}\sum_{k=0}^{n}\left(he^{i\theta}\right)^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n) = -\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1)\theta}h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

$$\frac{1}{h - e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}\left(he^{-i\theta} - 1\right)} = \frac{-e^{-i\theta}}{1 - he^{-i\theta}} = -e^{-i\theta}\sum_{k=0}^{n}\left(he^{-i\theta}\right)^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n) = -\sum_{k=0}^{n} e^{-i(k+1)\theta}h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Donc on en déduit :

$$\begin{aligned}
Q_n(h) &= \frac{i}{2\sin\theta}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-i(k+1)\theta} - e^{i(k+1)\theta}\right)h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n) \\
&= \frac{i}{2\sin\theta}\sum_{k=0}^{n} 2\sin((k+1)\theta)h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n) \\
&= \frac{i}{\sin\theta}\sum_{k=0}^{n} \sin((k+1)\theta)h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)
\end{aligned}$$

Or on rappelle que l'on a la relation

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k X^k + \underset{X\to 0}{o}(X^n).$$

On connaît donc $U_n(\cos\theta)$. On a :

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Comme $\theta \in ]0,\pi[$, on a que $\cos\theta \in ]-1,1[$. Donc les racines de $U_n$ sont les valeurs de $\cos\theta$ pour lesquelles $\sin((n+1)\theta) = 0$, c'est-à-dire les valeurs de $\theta \in ]0,\pi[$ pour lesquelles $(n+1)\theta \cong 0 \mod \pi$, c'est-à-dire les $\dfrac{k\pi}{n+1}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. On connaît donc les $n$ racines du polynôme $U_n$ de degré $n$.